

Modeling of Three-Dimensional Magnetotelluric Fields by Vector Finite Element Method Using GPU

P.A. Domnikov* (Novosibirsk State Technical University), N.V. Kondratyev (Novosibirsk State Technical University)

SUMMARY

Three-dimensional modeling of magnetotelluric fields using the vector finite element method is carried out. We use the vector differential equation for the single vector-potential and the system of vector-scalar equations for the coupled vector and scalar potentials. We use the edge-based vector basis functions for the vector potential and nodal basis functions for the scalar potential. We use the COCR solver for the solution of the large sparse system of linear equations with Jacobi and folded preconditioner. The CPU and GPU implementations of the developed methods are compared. We test our methods on complex realistic problem of three-dimensional magnetotelluric sounding providing in Russian Far East. The conducted experiments show the advantage of GPU using.

Моделирование трехмерных магнитотеллурических полей векторным методом конечных элементов с использованием GPU

П.А. Домников* (Новосибирский государственный технический университет), Н.В. Кондратьев (Новосибирский государственный технический университет)

Введение

В последние годы появилось много работ, где применяются графические ускорители (Graphics processing unit – GPU) для ускорения вычислений при моделировании трехмерных геоэлектромагнитных полей. Поскольку время расчета электромагнитных полей может быть достаточно велико, если используются сеточные методы, такие как метод конечных разностей (МКР) или метод конечных элементов (МКЭ), то такой интерес вполне оправдан. Например, в (Sommer et al. 2013) используется GPU для ускорения расчетов трехмерных электромагнитных полей в задаче морской электроразведки при использовании МКР. Использование GPU для решения задач электроразведки было успешно применено в (Gundogdu et al. 2016, Loke et al. 2013) и многих других работах. При решении разреженных систем уравнений, к которым приводит использование МКР и МКЭ, наиболее затратной является операция умножения разреженной матрицы на вектор (Grossman et al. 2016).

В данной работе рассматривается применение GPU для моделирования трехмерных магнитотеллурических полей (МТЗ) с использованием векторного МКЭ и проводится сравнение временных затрат.

Методы

Мы используем технологию выделения поля горизонтально-слоистой среды (Persova et al. 2013), при этом потенциал электромагнитного поля представляется в виде суммы $\mathbf{A} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}^p$, где \mathbf{A}^s определяется добавками от 3D неоднородностей, а \mathbf{A}^p – это потенциал электромагнитного поля в горизонтально-слоистой среде. Для описания электромагнитного поля используется векторное уравнение

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{A}^a) + i\omega\sigma \mathbf{A}^a = (\sigma - \sigma^n) \mathbf{E}^n, \quad (1)$$

где \mathbf{E}^n – это напряженность электрического поля в горизонтально-слоистой среде, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, σ – проводимость 3D-среды, ω – круговая частота, σ^n – проводимость горизонтально-слоистой среды. Далее мы будем называть уравнение (1) A-постановкой.

Вместо уравнения (1) мы можем использовать эквивалентную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{A}^a) + i\omega\sigma(\mathbf{A}^a + \operatorname{grad}V) = (\sigma - \sigma^n) \mathbf{E}^n, \\ -i\omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}V) - i\omega \operatorname{div}(\sigma \mathbf{A}^a) = -\operatorname{div}(\sigma - \sigma^n) \mathbf{E}^n, \end{cases} \quad (2)$$

которую мы будем называть A-V-постановкой. Значения индукция магнитного поля, полученные из решения систем (1) и (2) равны: $\mathbf{B} = \operatorname{curl}(\mathbf{A}^a + \operatorname{grad}V) = \operatorname{curl}(\mathbf{A}^a)$.

Для решения системы (1) мы используем векторный метод конечных элементов с векторными базисными функциями из пространства $\mathbf{H}(\operatorname{rot})$, а для решения системы (2) используется совместное применение векторных и скалярных базисных функций. Расчетная область разбивается на ячейки в форме прямоугольных параллелепипедов, которые не являются согласованными.

Для решения конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ, которые являются комплексно-симметричными, применялся метод COCR (Sogabe and Zhang 2007). Для предобуславливания использовалась главная диагональ конечноэлементной

матрицы $M^{-1} = D^{-1}$ (предобусловливание Якоби), а для СЛАУ, получаемой для (1), использовался также следующий предобусловливатель (folded preconditioner) $M^{-1} = D^{-1} + G^T D^{-1} G$, где D – это главная диагональ матрицы D^{-1} , а G – матрица дискретного градиента. Подобные предобусловливатели использовались в (Mifune et al. 2009).

Для сравнения использовались CPU Intel i5-2500 и GPU NVIDIA Tesla C2075. Реализация метода COCR на CPU была проведена с использованием библиотек Intel MKL. Для реализации на GPU использовались библиотеки cuSPARSE и cuBLAS.

Вычислительный эксперимент

Проведем сравнение вычислительных затрат, требуемых для моделирования трехмерного электромагнитного поля при использовании А-постановки и А-V-постановки, на фрагменте геоэлектрической модели, полученной на промежуточном этапе интерпретации данных МТЗ вдоль профиля 3ДВ (Северо-Западный участок) в пределах Дальневосточного Федерального округа.

Модель содержит 63 приповерхностных объекта с удельным сопротивлением от 0.1 Ом•м до 3000 Ом•м. На рис. 1 и рис.2 показан 3D-вид и сечение конечноэлементной сетки.

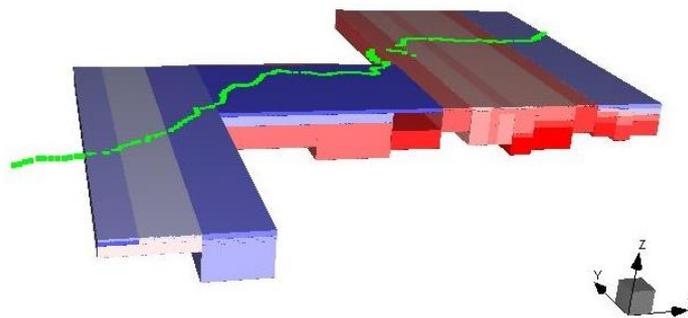


Рисунок 1 Вид трехмерных неоднородностей в геоэлектрической модели. Точками зеленого цвета показан профиль съемки данных

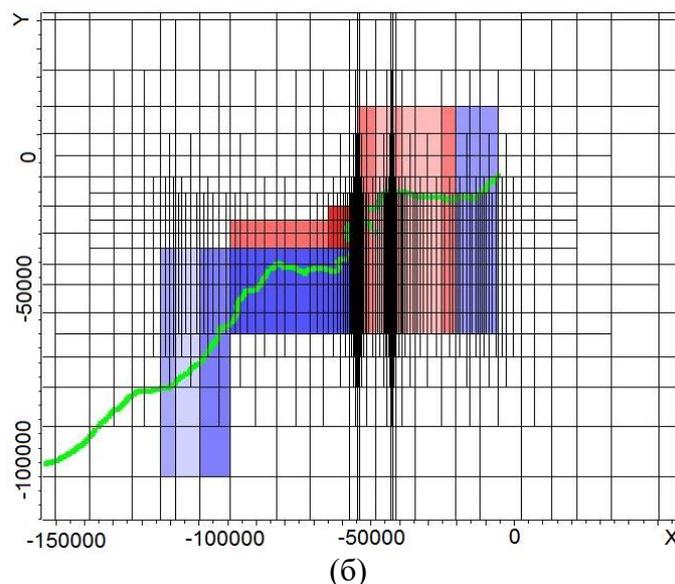


Рисунок 2 Сечение конечноэлементной сетки в плоскости $Z=0$

Моделирование электромагнитных полей проводилась в диапазоне частот электромагнитного поля от 0.0004 Гц до 500 Гц (всего 21 частота). В таблице 1 приведены вычислительные затраты на NVIDIA Tesla C2075. Для сравнения, на CPU Intel i5-2500 суммарное время решения задачи (для всех частот) составило 2559 с в A-V постановке с предобуславливанием Якоби при использовании 4-х потоков. Размер полученных СЛАУ составил 227430 комплексных неизвестных. На вложенных сетках было проверено, что погрешность значений компонент электромагнитного поля в приемниках находится в пределах 1-2%.

Таблица 1. Число итераций и время конечноэлементных решения СЛАУ на NVIDIA Tesla C2075 при использовании метода СОСР с предобуславливанием Якоби и с folded preconditioner. Результаты существенно зависят от частоты электромагнитного поля

Частота, Гц	А-V, постановка, предобуславливание Якоби		А-постановка, предобуславливание Якоби		А-постановка, Folded preconditioner	
	Итерации	Время, с	Итерации	Время, с	Итерации	Время, с
500	102	1.5	93	0.8	101	1.22
250	102	1.5	109	0.8	100	1.19
100	113	1.6	110	0.9	112	1.34
50	151	2.0	178	1.3	151	1.64
25	180	2.6	198	1.5	184	1.84
12.5	289	3.8	311	2.1	290	2.65
6.25	409	5.2	564	3.9	409	3.56
3.13	646	8.1	785	5.4	693	5.88
1.56	1160	14.2	1856	12.4	1272	10.12
0.781	2034	24.9	4867	32.2	2344	18.35
0.391	3473	42.2	10642	69.6	3845	29.77
0.195	4275	51.9	18241	118.8	4552	35.13
0.0977	5303	64.2	22601	146.9	5479	41.89
0.0488	5648	68.4	30235	197.1	5799	44.55
0.0244	5397	65.6	45099	292.2	5816	44.69
0.0122	6328	77.0	66760	425.6	6612	50.78
0.0061	5998	72.7	100623	639.0	6704	51.14
0.0031	6111	74.3	125717	799.1	8100	61.40
0.0015	5232	64.0	161382	1028.5	5665	43.88
0.0008	6448	78.8	248898	1596.0	6853	52.84
0.0004	6377	77.7	292183	1859.9	6318	49.00
Итого	65776	802.2	1131452	7234.9	71399	552.8

Выводы

Исследования показали следующее. При использовании векторного МКЭ для моделирования трехмерных магнитотеллурических полей время решения СЛАУ итерационным методом СОСР существенно зависит от частоты поля и растет с уменьшением частоты. Использование

постановки с двумя потенциалами позволяет уменьшить число итераций, причем использование предобусловливателя *folded preconditioner* позволяет получить несколько лучшие результаты. Использование графических процессоров в наших экспериментах позволило ускорить время вычислений более чем в 3 раза.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00446 мол_а.

References

Grossman, M., Araya-Polo, M., Alpak, F. O., Frank, F., Limbeck, J. and Sarkar, V. [2016] Analysis of sparse matrix-vector multiply for large sparse linear systems. 15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, ECMOR 2016.

Gundogdu, N. Y., Demirci, I., Varilsüha, D., Candansayar, M. E. and Yilmaz, A. E. [2016] Acceleration of three-dimensional direct current resistivity modelling using GPU computing. 22nd European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Near Surface Geoscience 2016.

Loke, M. H., Wilkinson, P. B. and Chambers, J. C. [2013] Computation of optimized arrays for 3-D electrical imaging surveys. Near Surface Geoscience 2013.

Mifune, T., Takahashi, Y. and Iwashita, T. [2009] Folded preconditioner: A new class of preconditioners for krylov subspace methods to solve redundancy-reduced linear systems of equations. IEEE Transactions on Magnetics 45(5), 2068-2075.

Persova, M. G., Soloveichik, Y. G., Trigubovich, G. M. and Tokareva, M. G. [2013] Methods and algorithms for reconstructing three-dimensional distributions of electric conductivity and polarization in the medium by finite-element 3D modeling using the data of electromagnetic sounding. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* 49(3), 329-343.

Sogabe, T. and Zhang, S. L. [2007] A COCR method for solving complex symmetric linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 199(2), 297-303.

Sommer, M., Hölz, S., Moorkamp, M., Swidinsky, A., Heincke, B., Scholl, C. and Jegen, M. [2013] GPU parallelization of a three dimensional marine CSEM code. *Computers and Geosciences* 58, 91-99.